Interpolation

Modellfunktioner som satisfierar givna punkter

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Några tillämpningar

Animering
- rörelser, t.ex. i tecknad film

Bilder
- färger
- skalning

Grafik

Diskret representation -> kontinuerlig

2 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Interpolation

- Vi känner *f(t)* i *n* punkter
  $y_i = f(t_i) \quad i = 1,..,n$
- Vi söker en funktion *P(t)* så att
  $P(t_i) = y_i$
- *P(t)* interpolerar *f* i punkterna t_i
- *P* kan vara polynom, trigonometriska funktioner…

3 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Basfunktioner

- En interpolerande funktion väljs som linjärkomb. av basfunktioner $\Phi_1(t)\ldots\Phi_n(t)$
- x_j är de param. som ska bestämmas, så att
  $f(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \Phi_j(t)$
- Att kräva att f interpolerar (t_i, y_i) $i = 1 \ldots n$ betyder att
  $f(t_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \Phi_j(t_i) = y_i$
- vilket ger ett system av linjära ekvationer $Ax = y$
- Elementen i A ges av $a_{ij} = \Phi_j(t_i)$

4 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Kvadratiskt system

- Genom att välja antalet basfunktioner = antalet mätpunkter får vi ett kvadratiskt system så att punkterna satisfieras exakt
- Valet av basfunktioner påverkar konditionen hos $Ax = y$

5 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Definitioner

- En interpolerande funktion används för att uppskatta värdet av *f* i en punkt *t*.
- Om *t* tillhör det intervall som bildas av $t_1 \ldots t_n$ görs en interpolation
- Ligger *t* utanför intervallet görs en extrapolation
- Att arbeta med polynom är fördelaktigt eftersom de är enkla att derivera och integrera

6 Teknisk-vetenskapliga beräkningar Pedher Johansson Department of Computing Science, Umeå University

Polynominterpolation

- Enklast och vanligast att välja ett polynom som interpolerande funktion
- Till n punkter (t_i, y_i) finns ett entydigt bestämt polynom av grad $\leq n\text{-}1$
- Polynomet kan representeras och evalueras på olika sätt, men alla måste ge samma matematiska funktion

Basfunktionerna för polynom

$$\Phi_j(t) = t^{j-1} \qquad j = 1 \ldots n$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= 1 \\ \Phi_2(t) &= t \\ \Phi_3(t) &= t^2 \\ \Phi_n(t) &= t^{n-1} \end{aligned}$$

$$P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$$

Koefficienterna c_i

- …bestäms av det linj. ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Vandermonde-matris, ofta illakonditionerad

Exempel

- Bestäm det andragradspolynom som interpolerar
- Ansats : $P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ ger ekvationen

t	f
90	0.96
100	1.12
110	1.30

$$\begin{pmatrix} 1 & 90 & 8100 \\ 1 & 100 & 10000 \\ 1 & 110 & 12100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 1.12 \\ 1.30 \end{pmatrix}$$

- $c = [0.42 \; \text{-}0.003 \; 0.0001]^T$ ger $P(t) = 0.42 - 0.003t + 0.0001t^2$

Om man lägger till en punkt måste *hela* systemet lösas på nytt.

- Illakond. problem : $\kappa(A) = 2 \cdot 10^6$

Newtons allmänna interpolationsformel

- Ansätt $P_{n-1}(t)$ som ett interpol.pol. av grad $\leq n\text{-}1$

$$\begin{aligned} P_{n-1}(t) = c_0 + c_1(t - t_1) + c_2(t - t_1)(t - t_2) + \\ + \ldots + c_{n-1}(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_{n-1}) \end{aligned}$$

- $P(t_i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ måste gälla insättning av (t_i, f_i) ger

$$\begin{aligned} c_0 &= f_1 \\ c_0 + c_1(t_2 - t_1) &= f_2 \\ c_0 + c_1(t_3 - t_1) + c_2(t_3 - t_1)(t_3 - t_2) &= f_3 \\ \ldots & \end{aligned}$$

…i exemplet …

- $P_2(t) = c_0 + c_1(t - 90) + c_2(t - 90)(t - 100)$

ger ekvationerna

ger nollorna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 1 & 20 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 1.12 \\ 1.30 \end{pmatrix}$$

t	f
90	0.96
100	1.12
110	1.30

- $\kappa(A) = 2 \cdot 10^2$

… exempel

- Den nya formuleringen ger
  $c = [0.96,\ 0.016,\ 0.0001]^T$

$$P_2(t) = 0.96 + 0.016(t-90) + 0.0001(t-90)(t-100) =$$
$$= 0.42 - 0.003t + 0.0001t^2$$

- Endast en ekvation behöver lösas om ytterligare en punkt läggs till

koefficienterna

- …och allt mer komplicerat (för!)

$$c_0 = f_1$$
$$c_1 = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}$$
$$c_2 = \frac{f_3 - f_1 - \frac{(t_3 - t_1)}{(t_2 - t_1)}(f_2 - f_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)}$$

Dividerade differenser

$$f[x_i] = f(x_i)$$
$$f[x_i, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_i, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, \dots, x_{i+n}]}{x_{i+n} - x_i}$$

Alltså:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

Bättre sätt att beräkna c_i

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \mathbf{c_0} & \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} & \mathbf{c_3} \\
t_1 & f_1 & & & & \\
 & & f[t_1, t_2] & & & \\
t_2 & f_2 & & f[t_1, t_2, t_3] & & \\
 & & f[t_2, t_3] & & f[t_1, t_2, t_3, t_4] & \\
t_3 & f_3 & & f[t_2, t_3, t_4] & & \\
 & & f[t_3, t_4] & & & \\
t_4 & f_4 & & & &
\end{array}$$

Nytt exempel

t	f
20	0.36379
21	0.36406
22	0.36434
23	0.36461
24	0.36488

$$\begin{array}{cccccc}
t & f & f[,] & f[,,] & \\
21 & 0.36406 & & & \\
 & & 0.00028/1 & & \\
22 & 0.36434 & & -0.00001/2 & \\
 & & 0.00027/1 & & 0.00001/3 \\
23 & 0.36461 & & 0/2 & \\
 & & 0.00027/1 & & \\
24 & 0.36488 & & &
\end{array}$$

$$P_3(x) = c_0 + c_1(t-t_1) + c_2(t-t_1)(t-t_2) + c_3(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) =$$
$$= 0.36406 + 0.00028(t-21) - 0.000005(t-21)(t-22) +$$
$$+ 0.00001/3(t-21)(t-22)(t-23)$$

Dividerade differenser

- $P(t) = c_1 + c_2(t-t_1) + c_3(t-t_1)(t-t_2) + \ldots + c_n \prod_{j=1}^{n-1}(t-t_j)$
  där
  $c_1 = f[t_1],\ c_2 = f[t_1, t_2],\ \ldots,\ c_n = f[t_1, \ldots, t_n].$
- Baklängesevaluering av $p(t)$ (t.ex. vid utritning):
  $p \leftarrow c_n,\ p \leftarrow (t - t_n)p + c_{n-1},\ p \leftarrow (t - t_{n-1})p + c_{n-2}, \ldots$

Beräkningskostnader	
Beräknandet av c_i	$\frac{1}{2}n^2$ divisioner + $n(n+1)$ additioner
Evaluering vid en punkt	n multiplikationer + $2n$ additioner

Fel vid polynomisk interpoalation

- Låt $t_1, \ldots, t_n$ vara inom intervallet $[a, b]$.
- Låt $f(t)$ vara en n ggr deriverbar funktion på $[a, b]$.
- Vi konstruerar ett polynom $p(t)$ av grad $n - 1$ som interpolerar f vid $t_1, \ldots, t_n$.

Då existerar ett $\xi \in [a, b]$ så att

$$f(t) - p(t) = (t-t_1)\ldots(t-t_n)\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\max_{t\in[a,b]}\left|f(t)-p(t)\right| = \max_{t\in[a,b]}\left|(t-t_1)\ldots(t-t_n)\right| = \max_{t\in[a,b]}\frac{\left|f^{(n)}(t)\right|}{n!}$$

Felgräns:

- Första försummade termen ty $f[t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$

Trunkeringsfelet

Newtons allmänna interpolationspol.

- trunkeringsfelet uppskattas med första försummade termen

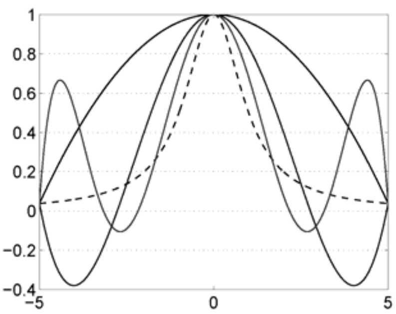
Felet i interpolationspunkterna är noll

Observera Runges fenomen

- Lågt gradtal vid polynominterpolation

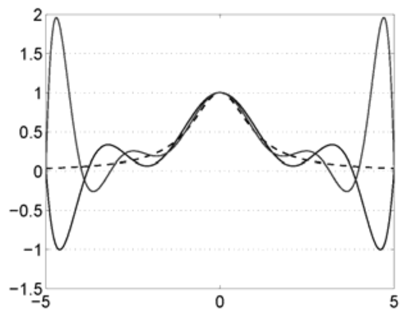
Runges funktion

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$



Runges funktion

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$



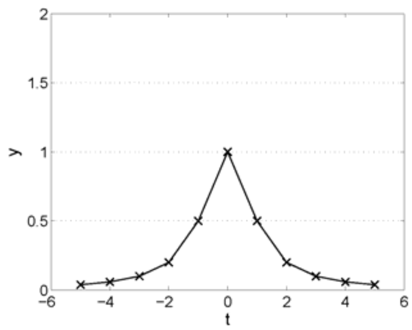
Styckvis interpolation

- Att anpassa ett enda polynom till ett stort antal punkter ger mest troligt upphov till oscillering
- Istället interpolerar man med funktioner av lägre grad på mindre intervall

Vanligast är

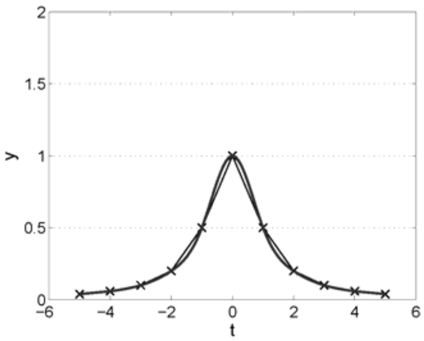
- Linjär interpolation
- Kvadratiska polynom
- Kubiska polynom

Linjär interpolation



Styckvis polynominterpolation

- Vill hitta en snygg följsam kurva sominterpolerar punkterna



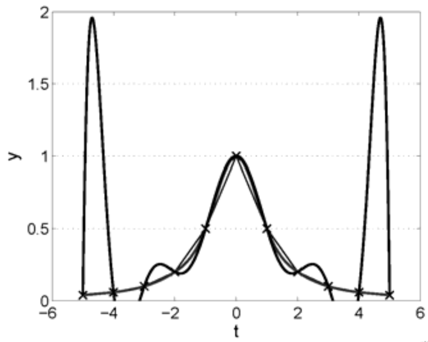
25

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Polynominterpolation

- Polynom har problem



26

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Linjär interpolation

- Rät linje mellan varje par av succ. punkter. Den totala interpolerande funktionen har då disk. derivata i alla inre punkter
- f approximeras med rätlinje genom (t_1, f_1) och (t_2, f_2) :

$$P(t) = f_1 + \frac{(f_2 - f_1)}{(t_2 - t_1)} \cdot (t - t_1)$$

27

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Polynominterpolation

- Man kan välja polynom så att den sammansatta funktionen är kontinuerligt deriverbar
  - Mjuk övergång i kontrollpunkterna
- Även andraderivatan kan fås kontinuerlig.

- För kvadratiska polynom krävs 3 villkor.
- För kubiska polynom krävs 4 villkor.

28

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Kubiska Hermite polynom

$$p_i(x) = c_1 + c_2(x - x_i) + c_3(x - x_i)^2(x - x_{i+1}) + c_4(x - x_i)(x - x_{i+1})^2$$

fyra villkor för att kunstruera polynomet *p(x)*

- 2 kontrollpunkter och 2 derivator
  - $p(x_i)=y_i$, $p(x_{i+1})=y_{i+1}$, $p'(x_i)=y'_i$, $p'(x_{i+1})= y'_i$
- Koefficienterna ges av

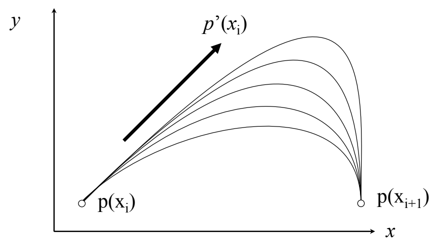
$$c_1 = y_i$$
$$c_2 = \frac{y_i - y_{y+1}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{h_i}$$
$$c_3 = \frac{y'_{i+1} - c_2}{(x_{i+1} - x_i)^2} = \frac{k'_{i+1} - c_2}{h_i^2}$$
$$c_4 = \frac{y'_i - c_2}{(x_{i+1} - x_i)^2} = \frac{k'_i - c_2}{h_i^2}$$

29

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Geometrisk tolkning



30

Teknisk-vetenskapliga beräkningar

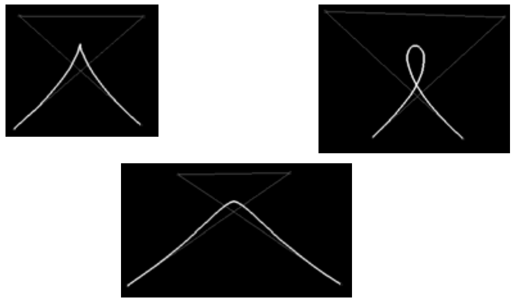
Pedher Johansson
Department of Computing Science, Umeå University

Kubiska Bézierpolynom

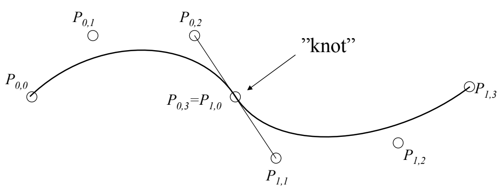
- Bestäms av fyra kontrollpunkter, P_0, P_1, P_2, P_3
- Derivatan i ändpunkten bestäms av linjen $3(P_1\text{-}P_0)$ samt $-3(P_2\text{-}P_3)$
- Kurvan alltid inom slutna höljet
- Kontinuerlig derivata enkelt

Vanliga i datorgrafik

Bezierpolynom



Kontinuerlig andraderivata



Hermite och Bezier

- Enkla i konstruktion och inplementation
- Enbart kontinuerlig första derivata
- Kontinuerlig andraderivata nödvändig ibland.

  T.ex då kurvan beskriver en tidsberoende bana där accelerationen bör vara kontinuerlig (t.ex. vid kamerarörelser).

Kubiska splines

Ställer följande krav

- Interpolerar kontrollpunkter
- Kontinuerlig derivata i kontrollpunkter
- Kontinuerlig andraderivata i kontrollpunkter
- Ger upphov till ett linjärt ekvationssystem för att bestämma koefficienterna c_i

Jakten på tillräkliga villkor

- Låt $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ med givet data $f_0, f_1, \dots, f_n$.
  En kubisk spline P på varje intervall är då:
  $P(t) = p_j(t) = c_{0,j} + c_{1,j}t + c_{2,j}t^2 + c_{3,j}t^3$, för t ∈ $[t_j, t_{j+1}]$.

$4n$ fria parametrar i P

- Vi kräver att P är 2 ggr deriverbar
  $p'_j(t_{j+1}) = p'_{j+1}(t_j+1)$ och $p''_j(t_j+1) = p''_{j+1}(t_j+1)$
  $\Rightarrow n-1+n-1$ villkor
- P interpolerar kontrollpunkterna
  $(p_j(t_j) = f_j,\ p_j(t_{j+1}) = f_{j+1})$
  $\Rightarrow 2n$ villkor.

$$4n - 2(n-1) - 2n = 2$$

Natural and periodic splines

- En spline P är en två gånger deriverbar, styckvis kubisk funktion.
- Vi kan lägga till två ytterliger villkor för att finna en entydig spline.

Villkor:

- Naturlig spline: $P''(a) = P''(b) = 0$.
- Periodisk spline: $P'(a) = P'(b)$, $P''(a) = P''(b)$.

Bestämma en spline

- Villkoren ger upphov till det tridiagonala systemet

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

där

$$b_i = \begin{cases} \Delta y_1 & \text{om } i = 1 \\ \dfrac{h_{i-1}}{h_i}\Delta y_i + \dfrac{h_i}{h_{i-1}}\Delta y_{i-1} & \text{om } i = 2,3,\ldots,n-1 \\ \Delta y_{i-1} & \text{om } i = n \end{cases}$$

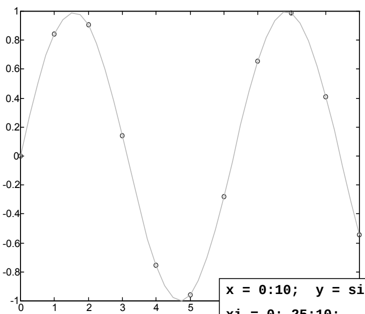
Bestämma en spline

- De beräknade k_i används i Hermitepolynomet

$$p_i(x) = c_1 + c_2(x - x_i) + c_3(x - x_i)^2(x - x_{i+1}) + c_4(x - x_i)(x - x_{i+1})^2$$

$$c_1 = y_i$$
$$c_2 = \frac{\Delta y_i}{h_i}$$
$$c_3 = \frac{k_{i+1} - c_2}{h_i^2}$$
$$c_4 = \frac{k_i - c_2}{h_i^2}$$

Kubiska splines




```
x = 0:10;  y = sin(x);
xi = 0:.25:10;
yi = spline(x,y,xi);
plot(x,y,'o',xi,yi)
```


Splines inte alltid perfekt

- Tenderar att oscillera vid kanter